定义 1 (极限转移概率记号):

为方便起见将极限转移概率 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 记为 P_{ij}, 以大写的 P 来区分与一步转移概率的区别.

命题 1 (闭集的收缩):

有时齐马尔科夫链 $\{X_n\}$, 令其状态空间为 $I = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$, 其中 C_i 为闭集互达等价类,T 为剩余状态.

对于每一个闭集 C_{i_0}, 我们可以将其收缩为一个状态 i_0, 令所有收缩态构成集合 A 对于收缩状态 i_0, 我们重新定义其转移概率如下:

$$\begin{cases} p_{ji_0} = \sum_{i\in C_i} p_{ji} & \forall j \in T \\ p_{j_0 i_0} = \delta_{j_0 i_0} & \forall j_0 \in A, \end{cases}$$

那么对于时齐马尔可夫链, 其可简化收缩态 (也即吸收态)A 与剩余状态 T 的并的马尔可夫链 $\{Y_n\}$

令 τ_{C_i} 代表 $\{X_n\}$ 中闭集 C_i 的首访时, 则猜测其拥有如下关系:

$$\forall i \in T, \forall i_0 \in A, \lim_{n\to\infty} p_{ii_0}^{(n)} = P\{\tau_{C_{i_0}} < \infty | X_0 = i\}$$

例 1 (简化闭集):

如下图所示, 此状态转移图中 $\{3,4\}$,$\{5,6\}$ 为闭集,$\{1,2\}$ 为剩余状态.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\frac{1}{4}"] \arrow[d, shift right, "\frac{1}{4}"'] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"] & 3 \arrow[r, shift right, "\frac{1}{2}"'] & 4 \arrow[l, shift right, "\frac{1}{2}"'] \\
2 \arrow[u, shift right, "\frac{1}{2}"'] \arrow[r, "\frac{1}{4}"] \arrow[rr, bend right, "\frac{1}{4}"'] & 5 \arrow[r, shift right, "\frac{1}{4}"'] & 6 \arrow[l, shift right, "\frac{1}{4}"']
\end{tikzcd}$$

图 1: 简化前

我们记 $\{3,4\}$ 收缩为 $\tilde{3}$,$\{5,6\}$ 收缩为 $\tilde{4}$, 则状态转移图简化为:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\frac{1}{4}"] \arrow[d, shift right, "\frac{1}{4}"'] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"] & \tilde{3} \arrow[loop right, "1"] \\
2 \arrow[u, shift right, "\frac{1}{2}"'] \arrow[r, "\frac{1}{2}"] & \tilde{4} \arrow[loop right, "1"]
\end{tikzcd}
$$

图 2: 简化后

命题 2 (一个可能可以用来判断极限吸收概率的方式):

有时齐马尔科夫链 $\{X_n\}$, 令其状态空间为 $I = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$, 其中 C_i 为闭集互达等价类,T 为剩余状态, 我们将其按照上面的方法进行闭集收缩简化, 记简化后的马尔可夫链为 $\{Y_n\}$

令 $\{Y_n\}$ 的 T 中含有 n 个元素,$\{A\}$ 中含有 m 个元素

为方便将吸收态 A 都置于最后, 则可给出简化后的状态转移矩阵 P 如下:

$$
P = \left\{ \begin{array}{cccc|cccc}
p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & p_{1i_1} & p_{1i_2} & \cdots & p_{1i_m} \\
p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & p_{2i_1} & p_{2i_2} & \cdots & p_{2i_m} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
p_{n1} & p_{n1} & \cdots & p_{nn} & p_{ni_1} & p_{ni_2} & \cdots & p_{ni_m} \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array} \right\}
$$

将其写为分块矩阵则有:

$$
P = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n\times n} & \mathbf{B}_{n\times m} \\ \mathbf{\Theta}_{m\times n} & \mathbf{I}_{m\times m} \end{pmatrix}
$$

其中矩阵 $\mathbf{A}$ 有如下对角化:

$$
\mathbf{A} = \mathbf{V}\,\mathbf{Diag}(\lambda_i)\mathbf{V}^{-1}
$$

那么若将 n 次转移矩阵 $P^{(n)}$ 内的分块矩阵分别记为 $\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{\Theta}^{(n)}, \mathbf{I}^{(n)}$

则有如下结论:

$$
\mathbf{B}^{(n)} = \mathbf{V}\,\mathbf{Diag}\left(\frac{1-\lambda_i^n}{1-\lambda_i}\right)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}
$$

其中我们可以发现, 若取 $\lim n \to \infty$ 则 $\mathbf{B}^{(n)}$ 就代表着各个状态的极限转移概率, 而若命题一成立则代表着吸收概率.

证明. 我们仅需要关注 $\mathbf{B}^{(n)}$, 因此由分块矩阵乘法给出递推关系:

$$\mathbf{B}^{(m+1)} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{(m)} + \mathbf{I}\mathbf{B}$$

我们猜测其通式为 $\mathbf{B}^{(n)} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^n)\mathbf{B}$, 由数学归纳法和递推式可验证成立. 接下来对 $\mathbf{A}$ 对角化:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{Q}\mathbf{V}^{-1}$$

则有:

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{V}\mathbf{Q}^n\mathbf{V}^{-1}$$

则化简为:

$$\mathbf{B}^{(n)} = \mathbf{V}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}^1 + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^n)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}$$

由于 $\mathbf{Q}$ 为对角阵, 其运算等价于本征值的运算, 且仍然为对角阵, 因此化简得到所求结果:

$$\mathbf{B}^{(n)} = \mathbf{V}\,\mathbf{Diag}\left(\frac{1-\lambda_i^n}{1-\lambda_i}\right)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}$$

$\square$